Bulle und Bär

Wie die Finanzmathematik Risiken bewertet

von Christoph Kühn

Finanzderivate gelten als obskur, verwickelt und riskant. Und das nicht zu Unrecht, wie die aktuelle Krise der globalen Finanzmärkte zeigt. Um Finanzderivate richtig bewerten zu können, bedarf es ausgefeilter Methoden der Finanzmathematik. Ausgelöst durch den explosionsartigen Anstieg des Derivatehandels hat sich die Mathematik zu einer Schlüsseltechnologie auf modernen Finanzmärkten entwickelt. Sie stellt den Finanzakteuren das mathematische Werkzeug für ihr Risikomanagement zur Verfügung.

Noch vor einem Vierteljahrhundert verband man mit dem Begriff »Finanzmathematik« vor allem Zinseszinsrechnung – also ein nützliches Werkzeug für Unternehmen und Häuslebauer, aber nichts, was Mathematiker lange in ihren Bann zu ziehen vermag. Heute assoziiert man mit Finanzmathematik Brown'sche Bewegungen, Itô-Integrale, stochastische Differenzialgleichungen, Integro-Differenzialoperatoren und unendlich-dimensionale stochastische Analysis. Was ist geschehen?

Als Geburtsstunde der modernen, auf anspruchsvollen wahrscheinlichkeitstheoretischen Modellen beruhenden Finanzmathematik wird das Jahr 1900 angesehen, in dem Louis Bachelier seine Dissertation »Théorie de la spéculation« an der Sorbonne einreichte.[/1/] Heute trägt die internationale finanzmathematische Gesellschaft ihm zu Ehren den Namen »Bachelier Society. Bachelier«, der während der Arbeit an seiner Dissertation an der Pariser Börse tätig war, nutzte eine eindimensionale Brown'sche Bewegung zur mathematischen Beschreibung von Aktienkursen. Bevor dieses Modell erläutert wird, sollen zunächst Finanzderivate eingeführt werden.

Finanzderivate

Der wesentliche Motor der Mathematisierung des Finanzwesens war der enorme Anstieg des Handels mit sogenannten derivativen Finanzinstrumenten. Finanzderivate sind Wertpapiere, bei denen die Höhe der Auszahlung von dem Preisverlauf eines oder mehrerer Basiswertpapiere abhängt (»abgeleitet« ist). Basiswertpapiere oder Basisgrößen können zum Beispiel Aktien, Bonds, Währungen, Rohstoffpreise, Indizes oder wieder Derivate sein. Bei der Bewertung und Absicherung von Derivaten ist die Unverzichtbarkeit fortgeschrittener mathematischer Methoden und Denkweisen besonders offenkundig. Die dafür entwickelte stochastische Finanzmathematik ist aber keinesfalls auf die Analyse von Derivaten beschränkt.

Typisches Beispiel für ein Derivat ist eine Kaufoption (Call-Option). Der Halter eines solchen Optionsscheins erwirbt heute das Recht (aber nicht die Pflicht), zu einem späteren Zeitpunkt eine Einheit des Basiswertpapiers zu einem heute festgelegten Preis K zu kaufen. K wird der Strikepreis der Option genannt. Ist der Kaufzeitpunkt fest vorgegeben, so spricht man von einer Kaufoption europäischen Typs. Kann die Option dagegen zu jedem beliebigen Zeitpunkt (bis zu einem gewissen Verfallsdatum) ausgeübt werden, so ist die Option amerikanischen Typs. Entsprechend erwirbt bei einer Verkaufsoption (Put-Option) der Halter das Recht, eine Einheit des Basiswertpapiers zu einem vorgegebenen Preis zu verkaufen. Die Unterscheidung nach amerikanischen und europäischen Optionen hat also nichts mit dem geografischen Ort der Börse zu tun, an der die Optionsscheine notiert sind. Man sagt, die Namensgebung sei dadurch motiviert, dass amerikanische Optionen wegen der Wahlmöglichkeit des Ausübungszeitpunktes konzeptionell und mathematisch schwieriger zu analysieren sind als europäische Optionen.

Sei S_T der (im Allgemeinen zum Zeitpunkt Null unbekannte) Marktpreis des Basiswertpapiers zum Ausübungszeitpunkt $T > 0$. Wenn $S_T > K$, dann wird der Halter eines europäischen Calls von seinem Recht Gebrauch machen und das Basiswertpapier zum vorher festgelegten Preis K erwerben. Falls er an dem Besitz überhaupt nicht interessiert sein sollte, würde er es natürlich sofort am Markt zum Preis S_T verkaufen und den Gewinn $S_T - K$ einstreichen. Wenn andererseits $S_T \leq K$, dann hat das Recht, das Basiswertpapier zum Preis K zu erwerben, keinen Wert mehr, weil das Papier am Markt mindestens genauso preiswert zu erwerben ist. Also ist der Wert (oder die Auszahlung) des Calls zum Zeitpunkt T gegeben durch

$$\max\{S_T - K, 0\}.$$

Es ist also klar, was die Option zum Zeitpunkt T wert ist. Da S_T aber zum Zeitpunkt Null noch nicht bekannt ist, ist nicht offensichtlich, was ein »fairer Preis« für die Option zum Zeitpunkt Null ist. Bei der Bewertung von Derivaten geht es um genau diese Frage. Sind Derivate nämlich im Verhältnis zueinander nicht richtig bewertet, entsteht Spielraum für Arbitrage.

Arbitragefreie Bewertung von Derivaten

Ein Schlüsselbegriff der modernen Finanzmathematik ist eine Arbitrage-Möglichkeit, kurz eine Arbitrage. Das ist eine risikolose Gewinnmöglichkeit ohne die Bindung von Kapital. Ein Investor kann dabei ohne Startkapital und ohne das Risiko einzugehen, am Ende des Spiels verschuldet zu sein, durch geschicktes Kaufen und Verkaufen der am Markt verfügbaren Wertpapiere Gewinne erzielen. Entscheidend ist, dass man für eine Arbitrage kein Kapital benötigt beziehungsweise binden muss. So stellt etwa eine garantierte Verzinsung um vier Prozent pro Jahr auf eine Spareinlage keine Arbitrage dar, da sie das eingesetzte Kapital bindet, dieses also nicht anderweitig investiert werden kann. Umgangssprachlich würde man die Zinserträge natürlich durchaus als »risikolosen Gewinn« bezeichnen.

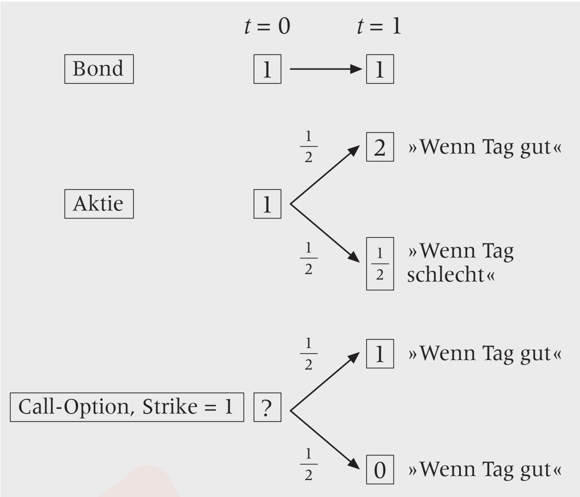
Eine (triviale) Arbitrage im obigen Sinne läge etwa vor, wenn man sich bei einer Bank 1000 Euro für drei Prozent Zinsen pro Jahr leihen könnte und dieses Geld bei einer anderen Bank für vier Prozent Zinsen pro Jahr anlegen könnte. Für den risikolosen Gewinn von 10 Euro brauchte man kein Kapital (lediglich eine gewisse Bonität, damit man das Geld von der ersten Bank geliehen bekommt). Um eine Arbitrage zu realisieren, muss man also Gegengeschäfte machen.

Einerseits werden die hier skizzierten mathematischen Modelle von sogenannten Arbitrageuren, also beispielsweise Hedgefonds-Managern, genutzt, um Arbitrage-Möglichkeiten aufzuspüren und sie für sich zu nutzen. So wird mit aufwändigsten Computerprogrammen ständig danach gefahndet, ob alle Wertpapiere vom Markt »richtig« zueinander bewertet sind. Andererseits ist das Fehlen von Arbitrage (Arbitrage-Freiheit) eine Minimalanforderung an ein sinnvolles ökonomischen Modell. Aus der Forderung der Arbitrage Freiheit lassen sich oft schon eindeutige Derivatepreise bestimmen. Diese Grundidee der arbitragefreien Derivatebewertung lässt sich am Einperioden-Binomialmodell mit zwei Basiswertpapieren darstellen.

Kursverlauf mit zwei möglichen Werten: Das Einperioden-Binomialmodell

Der Markt bestehe aus zwei Basiswertpapieren: einem risikolosen Wertpapier (»Bond«) und einer risikobehafteten Aktie. Zudem gibt es nur zwei Zeitpunkte $t = 0$ (»heute«) und $t = 1$ (»morgen«). Der Bond habe heute den Preis 1, und wir wissen bereits, dass er morgen mit Sicherheit auch den Preis 1 haben wird. Die Aktie startet ebenso mit dem Preis 1. Zum Zeitpunkt $t = 1$ gibt es aber zwei Möglichkeiten: Der Kurs der Aktie ist auf 2 gestiegen oder auf ½ gefallen. Beides trete annahmegemäß mit Wahrscheinlichkeit ½ ein. Die Frage ist nun, wie viel eine Call-Option auf diese Aktie zum Strike 1 (also das Recht, morgen eine Aktie zum Preis 1 zu kaufen) heute wert ist 1.

1 Das Einperioden-Binomialmodell.



Die Auszahlung der Call-Option lässt sich durch Investitionen in Aktie und Bond auf folgende Weise replizieren: kaufe in $t = 0$ $\lambda = ⅔$ Aktien und $\mu = -⅓$ Bonds. λ und μ bestimmen sich als eindeutige Lösung folgenden linearen Gleichungssystems

$$\left.\begin{array}{l}\mu + 2\lambda = 1\\ \mu + \tfrac{1}{2}\lambda = 0\end{array}\right\} \Leftrightarrow \qquad \mu = -\tfrac{1}{3},\quad \lambda = \tfrac{2}{3} \qquad (1.1)$$

»– ⅓ Bonds kaufen« bedeutet, sich ⅓ Bonds zu leihen (um damit das Aktieninvestment zu finanzieren) und die geliehenen Bonds zum Zeitpunkt $t = 1$ wieder zurückzubezahlen.

Investitionen in fallende Kurse

Generell kann man sich nicht nur in Bonds verschulden, sondern auch in den risikobehafteten Wertpapieren. Der Fachbegriff dafür ist Leerverkauf: Ein Investor verkauft ein Wertpapier, das ihm gar nicht gehört. Daher muss er es zu einem späteren Zeitpunkt am Markt wieder zurückkaufen. Wenn der Kurs zwischenzeitlich gesunken ist, hat der Investor einen Gewinn gemacht, andernfalls einen Verlust. Mit Leerverkäufen kann man also in fallende Kurse investieren.

Der eindeutige arbitragefreie Preis der Call-Option zum Zeitpunkt $t = 0$ ist nun gerade der Geldbetrag, den man in $t = 0$ benötigt, um $\lambda = ⅔$ Aktien und $\mu = -⅓$ Bonds zu kaufen,also

$$p = \text{Optionpreis}_{\,t=0} = \text{Replikationskosten} = -\tfrac{1}{3}\cdot 1 + \tfrac{2}{3}\cdot 1 = \tfrac{1}{3}$$

Jeder andere Optionspreis als ⅓ würde nämlich eine Arbitrage ermöglichen. Im Fall $p > ⅓$ könnte man durch folgende Strategie Gewinne erzielen: »Leerverkaufe eine Option. Kaufe dafür das replizierende Portfolio, also ⅔ Aktien und – ⅓ Bonds.« Der Überschuss beträgt $p - ⅓ > 0$. Zum Zeitpunkt 1 kann die Option in beiden möglichen Zuständen mit dem Wert des replizierenden Portfolios zurückgekauft werden, und der Überschuss $p - ⅓ > 0$ bleibt als risikoloser Gewinn.

Im Fall $p < ⅓$ lautet die Anweisung: »Kaufe eine Option. Leerverkaufe ⅔ Aktien und kaufe ⅓ Bonds.« Der Überschuss beträgt $⅓ - p > 0$. Zum Zeitpunkt 1 neutralisieren sich wieder in beiden möglichen Zuständen das replizierende Portfolio und die Option, und es bleibt der Gewinn $⅓ - p > 0$.

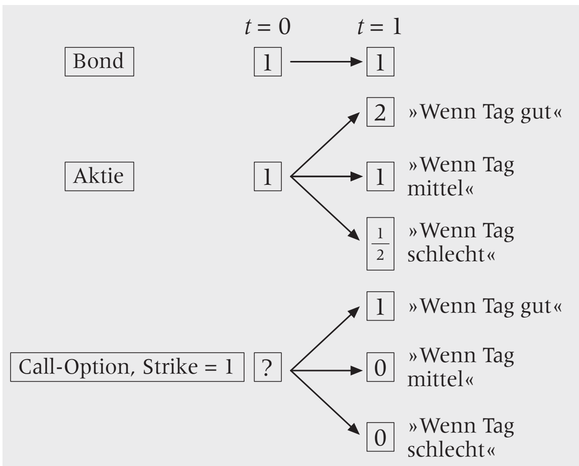
Wahrscheinlichkeiten gehen nicht in Optionspreis ein

Eine verblüffende Beobachtung ist, dass die Wahrscheinlichkeit ½, mit der die Aktie in dem Modell steigt, nicht in die Berechnung des arbitragefreien Optionspreises eingeht. Das heißt, wäre die Wahrscheinlichkeit, dass die Aktie auf 2 steigt, nicht ½, sondern beispielsweise $^{9}/_{10}$, dann wäre der arbitragefreie Preis der Option nach wie vor ⅓, obwohl die Wahrscheinlichkeit, dass die Option die Auszahlung 1 liefert und nicht wertlos verfällt, viel größer wäre.

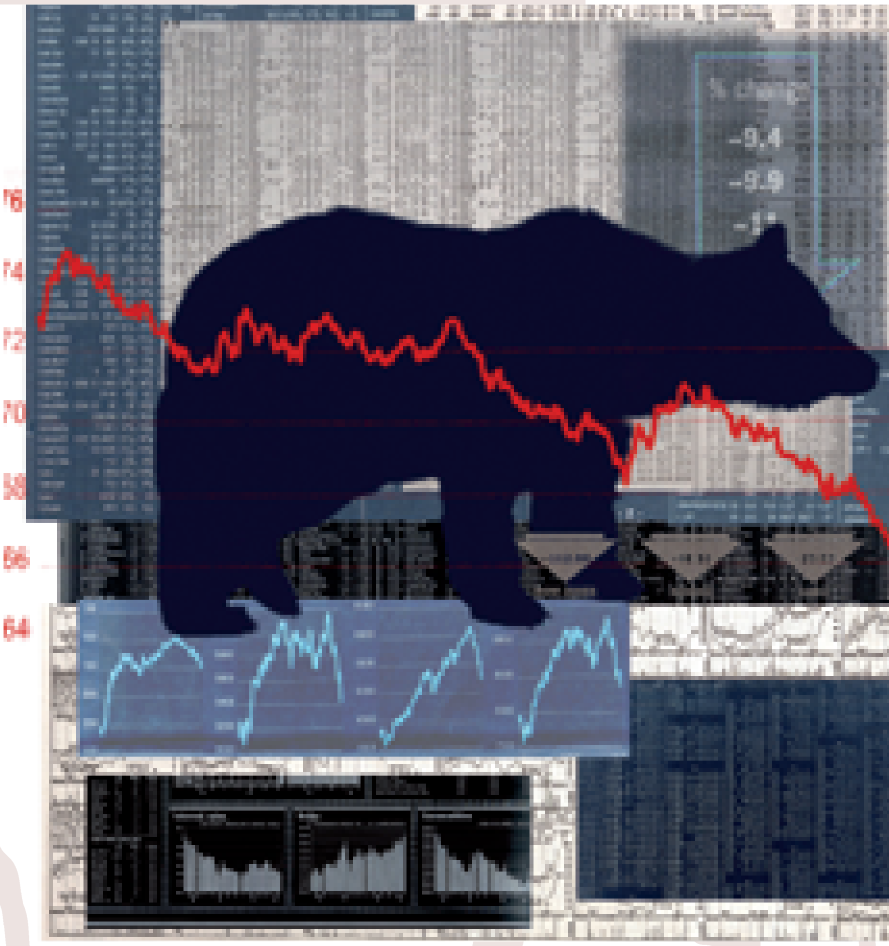
Der Grund hierfür ist, dass sich der Optionspreis durch ein Replikationsargument bestimmt, für das nur die heutigen Preise und die möglichen morgigen Preise der Basiswertpapiere relevant sind – nicht aber die Wahrscheinlichkeiten, mit denen die möglichen morgigen Preise eintreten. Der Ansatz unterscheidet sich also grundlegend von einer klassischen versicherungsmathematischen Bewertung der Option, bei der die Optionsprämie etwa durch den Erwartungswert der Optionsauszahlung gegeben wäre. In diesem Beispiel wäre der Erwartungswert gleich ½, was als Optionspreis nach obiger Überlegung eine Arbitrage ermöglichen würde.

Eine Bank, die Call-Optionen verkauft, kann sich gegen das damit verbundene Risiko perfekt absichern. Hierfür muss sie in $t = 0$ λ risikobehaftete Wertpapiere kaufen. λ wird Hedgingstrategie oder Hedge genannt (englisch für »sich absichern«). Die spezielle Struktur des Calls geht in die Überlegungen nicht ein. Das Gleichungssystem (1.1) hätte auch für andere Auszahlungen, die auf den Wert der Aktie zum Zeitpunkt 1 bedingt sind, eine eindeutige Lösung.

Das Replikationsargument ist allerdings nicht sehr robust bezüglich der Modellwahl. Schon die Hinzunahme eines dritten möglichen Aktienpreises zum Zeitpunkt $t = 1$ macht die perfekte Nachbildung der Option aus Aktien und Bonds unmöglich, wie das folgende Beispiel des Einperioden-Trinomialmodells 2 zeigt.



2 Das Einperioden-Trinomialmodell mit drei möglichen Aktienverläufen.



Die Auszahlung der Call-Option lässt sich durch Aktie und Bond nicht replizieren:

$$\left.\begin{array}{l} \lambda + 2\mu = 1 \\ \lambda + \mu = 0 \\ \lambda + \tfrac{1}{2}\mu = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \text{ keine Lösung}$$

Brown'sche Bewegung oder das Torkeln eines Betrunkenen

Louis Bachelier modellierte Aktienpreisprozesse mit Brown'schen Bewegungen. Beginnen wir mit dem diskreten Analogon der Brown'schen Bewegung – einer elementaren Irrfahrt (»random walk«). Seien ε_1, ε_2, ε_3, … stochastisch unabhängige Zufallsvariablen, die jeweils mit Wahrscheinlichkeit ½ die Werte 1 und −1 annehmen, das heißt $P(\varepsilon_n = 1) = P(\varepsilon_n = -1) = ½$ für alle $n = 1, 2, 3, \ldots$ Stochastische Unabhängigkeit bedeutet, dass man aus dem Wert, den ε_1 annimmt, keine Rückschlüsse auf den Wert ziehen kann, den ε_2 annehmen wird.

Nun addieren wir diese unabhängigen Zufallsbewegungen auf. Im zweidimensionalen Raum wird der dabei entstehende Prozess oft mit dem Torkeln eines Betrunkenen in Verbindung gebracht, der ohne Gedächtnis rein zufällig hin- und herirrt. Wir fixieren den Zeitabstand $\Delta t > 0$ zwischen zwei Bewegungen und den Absolutbetrag der (eindimensionalen) Bewegung $\Delta x > 0$. Diese Größen sollen klein sein und später im richtigen Verhältnis gegen Null gehen. Definiere

$$X_{n\Delta t} = \Delta x \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i, \quad n = 1, 2, 3, \ldots \tag{1.2}$$

Das heißt $X_{n\Delta t} = X_{(n-1)\Delta t} + \Delta x \varepsilon_n$. Man kann sich X als den Preis einer Aktie vorstellen. Es gehen ständig Kauf- und Verkaufsorder für diese Aktie ein. Beim Eingang einer Kauforder steigt der Preis um Δx Geldeinheiten, während ihn eine Verkaufsorder um Δx Geldeinheiten nach unten zieht.

Bekanntlich ist die Varianz der Summe unabhängiger Zufallsvariablen die Summe der Varianzen der Zufallsvariablen, also gilt

$$\text{Varianz } (X_{n\Delta t}) = n \text{ Varianz } (\Delta x \varepsilon_1) = n(\Delta x)^2. \tag{1.3}$$

Zu dem Prozess X_t, der nur auf dem diskreten Gitter $t = 0, \Delta t, 2\Delta t, \ldots$ definiert ist, soll nun eine sinnvolle Entsprechung in stetiger Zeit gefunden werden. Dafür lassen wir den Zeitabstand Δt gegen Null laufen. Betrachten wir den Prozess (1.2) auf dem Zeitintervall [0, 1], so brauchen wir $1/\Delta t$ Zeitschritte, um von 0 nach 1 zu gelangen. Damit die Varianz von X_1 asymptotisch für $\Delta t \to 0$ weder verschwindet noch explodiert und wir einen sinnvollen Grenzwert erhalten, muss nach der Formel (1.3) der Absolutbetrag Δx eines einzelnen Sprungs gerade so schnell gegen Null gehen, dass der Quotient $(\Delta x)^2/\Delta t$ konstant bleibt. Also wähle $\Delta x = \sqrt{\Delta t}$. Der mit dieser Skalierung entstehende zeitstetige Grenzprozess von (1.2) für $\Delta t \to 0$ ist eine Brown'sche Bewegung $(B_t)_{t\in[0,1]}$. Aus dem zentralen Grenzwertsatz folgt, dass B_t für alle $0 \le t \le 1$ eine normalverteilte Zufallsvariable ist. Die Zuwächse von B_t sind wieder stochastisch unabhängig von dem Verhalten des Prozesses in der Vergangenheit, und es gilt Varianz $(B_t) = t$.

Addiert man alle Absolutbeträge der Veränderungen des Prozesses (1.2) im Zeitintervall zwischen 0 und 1 auf, so erhält man, egal welche Werte die ε_n annehmen, immer $\sum_{n=1}^{1/(\Delta t)} |\Delta x \varepsilon_n| = \frac{\Delta x}{\Delta t}$, was wegen obiger Wahl von Δx gleich $\frac{1}{\sqrt{\Delta t}}$ ist. Die Summe der Beträge der Veränderungen auf dem Intervall [0, 1] gehen also für $\Delta t \to 0$ gegen unendlich, das heißt, die Schwankungen explodieren. Der Grenzprozess, die Brown'sche Bewegung, ist dann von »unendlicher Variation«. Anschaulich bedeutet dies, dass $(B_t)_{t\in[0,T]}$ aus »ganz vielen, ganz kleinen« zufälligen Auf- und Abwärtsbewegungen besteht, die sich zum größten Teil gegenseitig kompensieren und damit den Prozess endlich halten. Würde man aber den Versuch unternehmen, die Auf- und Abwärtsbewegungen voneinander zu trennen und separat aufzuaddieren, so würden beide Summen explodieren. Man kann sogar zeigen, dass, wenn Aktienpreisprozesse nicht-konstant und differenzierbar in der Zeit sind, es stets Arbitrage-Möglichkeiten gibt.

Das Black-Scholes-Modell

»All models are wrong but some are useful.«

(George E. P. Box)

Das mit dem Nobelpreis prämierte Black-Scholes-Modell besteht in seiner einfachsten Form, wie das Beispiel in **1**, aus zwei Wertpapieren, die am Markt gehandelt werden: einem risikolosen Bond mit kontinuierlicher Verzinsung mit konstanter Rate $r \ge 0$, also $B(t) = exp(rt)$ und einer risikobehafteten Aktie, deren Preis $S(t)$ von einer Brown'schen Bewegung $W(t)$ angetrieben wird, also

$$S(t) = s_0 \exp\left(\mu t + \sigma W(t) - \frac{1}{2}t\right), \quad t \in [0, T]. \tag{1.4}$$

s_0 ist der Startwert der Aktie, $\mu \in \mathbb{R}$ bezeichnet den Drift und σ die Volatiliät, also die Höhe der zufälligen

Schwankungen. *S(t)* wird geometrische Brown'sche Bewegung genannt. Im Gegensatz zur Brown'schen Bewegung selber, die von Bachelier zur Modellierung benutzt wurde, kann *S(t)* nicht negativ werden, und die stochastische Verteilung der Rendite $\frac{S(t+1)-S(t)}{S(t)}$ (Gewinn pro eingesetztes Kapital) hängt nicht von *S(t)* ab, was ökonomisch sinnvoll erscheint.

Implizit werden in dem Modell unter anderem folgende Voraussetzungen gemacht: 1) Käufe und Verkäufe der Aktie sind jederzeit möglich, und es fallen dabei keine Transaktionskosten an, 2) auf Kapitalerträge fallen keine Steuern an, 3) Käufe und Verkäufe haben keinen Einfluss auf den Wertpapierpreis (vollständige Liquidität). Zusätzlich werden folgende stochastische Verteilungsannahmen für den Aktienpreis gemacht: Die Renditen $\frac{S(t+1)-S(t)}{S(t)}$ sind normal verteilt, und die bedingte Verteilung von $\frac{S(t+1)-S(t)}{S(t)}$ hängt nicht von der Vergangenheit ab, insbesondere verändert sich der »Marktpreis des Risikos« nicht.

Die bahnbrechende Entdeckung war nun, dass man die vom Preis S_T abhängige und damit zufällige Auszahlung der Call-Option

$$\max\{S_T - K, 0\} \tag{1.5}$$

wie im simplen Einperioden-Binomialmodell aus Beispiel 1.1 durch Handelsgewinne mit der Aktie und dem Bond mit Wahrscheinlichkeit 1 replizieren kann. Dabei reicht es aber nicht aus, zum Startzeitpunkt eine bestimmte Anzahl an Aktien zu kaufen und diese dann bis zur Fälligkeit der Option zu halten (»buy-and-hold strategy«). Vielmehr muss der »Hedge«, also die Anzahl an Aktien, die man hält, um sich gegen die zufällige Auszahlung abzusichern, mit der Zeit und abhängig vom Verlauf des Aktienkurses ständig angepasst werden. Mathematisch betrachtet ist diese Anzahl wie der Aktienkurs ein stochastischer Prozess, der in der Theorie sogar unendliche Variation besitzt. Wie schon in Beispiel 1 begründet, ist das Startkapital, das man benötigt, um die Hedgingstrategie zu realisieren, der eindeutige arbitragefreie Preis der Call-Option. Sei *v(s, t)* der Preis des Calls zum Zeitpunkt *t* unter der Bedingung, dass *S(t)* = *s*. Dann erfüllt *v(s, t)* die folgende partielle Differenzialgleichung

$$\frac{1}{2}\sigma^2 s^2 \frac{\partial^2 v(s,t)}{\partial s^2} + rs\frac{\partial v(s,t)}{\partial s} + \frac{\partial v(s,t)}{\partial t} = rv(s,t),$$

$$\text{für alle } s \in \mathbb{R}_+,\ t \in [0,T)$$

mit der Endbedingung
$v(s, T) = \max\{s - K, 0\}$, für alle $s \in \mathbb{R}_+$.

Sprünge erhöhen das Risiko

Auf den ersten Blick wirkt das Modell von Black und Scholes recht komplex und realitätsnah und scheint mit dem minimalistischen Binomialmodell aus Beispiel 1 wenig gemein zu haben. Trotzdem ist das für das »Hedging« relevante kurzfristige Verhalten des Preisprozesses *S(t)* dem Beispiel 1 mit zwei möglichen Preisänderungen der Aktie erstaunlich ähnlich. Anschaulich kann man argumentieren, dass die Stetigkeit der Brown'schen Bewegung die Unvorhersehbarkeit der Aktienpreisentwicklung für kurze Zeitintervalle genauso einschränkt wie im Beispiel 1 die Beschränkung auf zwei mögliche Preise der Aktie zum Zeitpunkt *t* = 1.

Wenn man also im statischen Einperiodenmodell zwei mögliche Endpreise als zu wenig empfindet, dann

sind auch die Spielräume des Black-Scholes-Modells ungenügend. Mit anderen Worten erlaubt die Erweiterung um einen dritten Zustand wie in Beispiel 2 schon mehr Flexibilität als das Black-Scholes-Modell.

Eine nützliche Weiterentwicklung des Black-Scholes-Modells besteht daher darin, Sprünge des Aktienkurses zuzulassen. Darin kann auch ein wesentlicher Unterschied der Vorstellungen der Ökonomie und der Physik, auf die Bachelier, Black und Scholes in ihren Modellen zurückgriffen, gesehen werden. Sprünge, wie sie real auf dem Aktienmarkt vorkommen, erhöhen das Risiko auf den Märkten und beschränken die Möglichkeiten der Investoren, ihr Portfolio wirkungsvoll zu kontrollieren. Zum Beispiel kann bei stetigen Preisprozessen eine Aktie verkauft werden, sobald sie die Marke von 100 Euro unterschreitet, und ihr Besitzer bekommt beim Verkauf zumindest noch 100 Euro. Wenn der Preis aber unter 100 Euro springt, womit man auch das Phänomen modellieren kann, dass der Investor nicht in der Lage ist, schnell genug zu reagieren, ist das Risiko wesentlich größer und schwieriger abzuschätzen.

Ein wichtiger Effekt auf den Märkten ist, dass das Hedgen von Optionen einen teils immensen Rückkoppelungseffekt auf den Aktienpreis ausübt. Dieses Phänomen, das im Black-Scholes-Modell nicht berücksichtigt wird, wird dadurch befördert, dass viele Optionen in viel größeren Volumina gehandelt werden als die zugrunde liegenden Aktien. Ein ähnliches Problem besteht darin, dass bei leichten Kursverlusten die Computerprogramme einiger Marktteilnehmer Verkaufsempfehlungen aussprechen, deren Befolgung zu weiteren Kursverlusten führt, was wiederum weitere Marktteilnehmer zum Verkauf verleitet.

Trotz aller seiner offenkundigen Mängel ist das Black-Scholes-Modell immer noch der Industriestandard zur Bewertung von Derivaten. Auch wenn viele seiner wesentlichen Annahmen in der Realität nicht erfüllt sind, wird es von Banken mit entsprechenden Anpassungen immer noch benutzt, und in der Wissenschaft ist es das Referenzmodell, mit dem sich die Ergebnisse jedes neuen, komplizierteren Modells vergleichen lassen müssen.

Das Resultat von Black und Scholes wurde 1973 in dem Artikel »The Pricing of Options and Corporate Liabilities« vom »Journal of Political Economics« veröffentlicht; (übrigens nach mehreren erfolglosen Versuchen bei anderen Zeitschriften). Laut »Google Scholar« wurde die Arbeit[2] bisher 8677 Mal zitiert (Stand April 2008). Im Jahre 1997 erhielten Myron Scholes und Robert C. Merton den Wirtschaftsnobelpreis für ihre Arbeiten[2][3] zur Optionsbewertung. Fischer Black war bereits 1995 gestorben.

Garantiefonds

Es werden die verschiedensten, teilweise sehr exotischen Derivate gehandelt. Einerseits dient der Kauf von Derivaten der Absicherung realer Risiken (etwa der Absicherung des Währungsrisikos eines exportierenden Industrieunternehmens). Andererseits werden durch den Handel von Derivaten neue Risiken eingegangen, die die Akteure oft nicht mehr durchschauen und die zu globalen Finanzkrisen führen.

Für Privatanleger interessante Derivate sind sogenannte Garantiefonds. Bei einem solchen Fonds wird das eingesetzte Kapital in eine Kombination aus festverzinslichen Wertpapieren (Bonds) und Call-Optionen auf einen Aktienindex (etwa dem DAX) investiert. Wenn die Strikepreise der Optionen groß sind, sind die Optionen im Vergleich zur Nachbildung des Aktienindexes relativ preiswert. Daher ist der Bondanteil (und damit die garantierte Auszahlung zum Laufzeitende) relativ groß. Wegen der anfallenden Zinsen auf das in Bonds investierte Kapital kann mithin sogar eine Auszahlung von 100 Prozent des eingesetzten Gesamtkapitals garantiert werden. Steigt der Aktienindex nur moderat oder fällt er sogar, dann verfallen die Call-Optionen und das Endkapital besteht nur aus dem Garantiewert. Bei einem starken Anstieg des Index gewinnen die Call-Optionen aber überproportional zum Index an Wert und der Anleger kann davon stark profitieren (man nennt das »Hebelwirkung« der Call-Option). Er kann mitunter einen höheren erwarteten Gewinn erzielen als ein Investor, der denselben Geldbetrag zu 100 Prozent direkt in den Index investiert und damit natürlich keine Garantie auf das eingesetzte Kapital hat.

Allgemein kann man mit Derivaten zufällige Auszahlungen generieren, die nichtlinear vom Kurs einer Aktie oder eines Aktienindexes zum Fälligkeitszeitpunkt abhängen. Mit diesen Produkten kann ein Anleger ein Portfolio bilden, was sehr viel individueller auf sein Risikoprofil abgestimmt ist, als wenn er nur direkt in Aktien investieren könnte. ◆

Literatur

/1/ Bachelier, L., Théorie de la spéculation. Annales Scientifiques de l'Ecole Normale Supérieure, 17, 21–86, 1900.

/2/ Black, F. und Scholes, M., The Pricing of Options and Corporate Liabilities. Journal of Political Economics, 81, 637–659, 1973.

/3/ Merton, R., Theory of Rational Option Pricing. Bell Journal of Economics and Management Science, 4, 141–183, 1973.

Der Autor

Juniorprofessor Dr. Christoph Kühn, 34, studierte Wirtschaftsmathematik an der Philipps-Universität Marburg und promovierte 2002 an der Technischen Universität München in Mathematik. Nach einer Post-Doc-Tätigkeit an der Technischen Universität Wien ist er seit Dezember 2002 als Juniorprofessor für Finanzmathematik am Aufbau des Frankfurt MathFinance Instituts der Goethe-Universität beteiligt. Seine Forschungsinteressen liegen auf dem Gebiet der Finanzmathematik und der stochastischen Analysis. Innerhalb der Finanzmathematik beschäftigt sich Kühn insbesondere mit Portfoliooptimierung, Derivatebewertung und der Modellierung illiquider Finanzmärkte sowie der Marktmikrostruktur.

ckuehn@math.uni-frankfurt.de http://ismi.math.uni-frankfurt.de/kuehn